

Министерство сельского хозяйства РФ

ФГБОУ ВПО «Брянская государственная
сельскохозяйственная академия»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**Тема «Построение эпюр внутренних
силовых факторов»**

Методические рекомендации, задания и пример выполнения
расчетно-графической работы
для студентов сельскохозяйственных вузов
инженерных специальностей

Брянск 2012

УДК 539.3/6 (07)

ББК 30.121

К 26

Карпович А.П. Сопротивление материалов по теме построение эпюр внутренних силовых факторов: методические рекомендации, задания и пример выполнения расчетно-графической работы / А.П. Карпович, С.И. Старовойтов. – Брянск. Издательство Брянской ГСХА, 2012. – 44 с.

Рецензент: БГИТА, кафедра сопротивления материалов и строительной механики, к.т.н.доцент Захаров В.М.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета от 24 марта 2012 года протокол № 2.

© Брянская ГСХА, 2012

© Карпович А.П., 2012

© Старовойтов С.И., 2012

1 Методические рекомендации по оформлению расчетно-графической работы

Задачи расчетно-графической работы даны последовательно, по мере их усложнения.

Выполняя расчетно-графическую работу, необходимо соблюдать следующие требования:

а) расчетно-графические работы относятся в стандарте к текстовым документам, выполняются на бумаге формата А4 (210x297) с текстом на одной стороне, выполненным аккуратно, чернилами одного цвета. Допускается выполнение расчетно-графической работы в ученической тетради в клеточку, четким почерком и аккуратными рисунками с полями для возможных замечаний;

б) на титульном листе необходимо указать наименование ВУЗа, наименование кафедры, дисциплины, тему расчетно-графической работы, группу, фамилию и инициалы студента, вариант расчетно-графической работы и данные преподавателя;

в) перед решением каждой задачи надо выписать ее условие с числовыми данными, а также выполнить чертеж, соответствующий своему варианту с указанием всех величин, необходимых для расчета; само решение должно сопровождаться краткими пояснениями. Следует также указывать размерность всех получаемых величин;

г) каждую задачу следует решать с новой страницы;

д) все расчеты необходимо производить в системе СИ.

Рекомендуемая литература:

1. Степин П.А. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1988.

2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1989.

3. Кочетов В.Т. Сопротивление материалов. Изд-во Ростовского университета, 1987.

2 Эпюры внутренних силовых факторов. Алгоритм построения эпюр

С помощью эпюр находят опасные сечения, производят расчеты на прочность и жесткость, а также ряд других расчетов задач сопротивления материалов.

Эпюрой называется графическое изображение внутреннего силового фактора.

Внутренние силовые факторы определяются методом сечений или методом РОЗУ, (аббревиатура первых букв по тем действиям, при помощи которых строятся эпюры - **р**ассекай, **о**тбрасывай, **з**аменяй, **у**равновешивай - см. рисунок 1 а), то есть для построения эпюр необходимо произвести следующие действия:

- мысленно рассечь конструкцию на рассматриваемом участке,
- отбросить одну часть сечения (правую или левую, обычно наиболее нагруженную),
- уравнять, то есть заменить внешней нагрузкой внутренний силовой фактор и написать уравнение внутреннего силового фактора для оставшейся части при помощи внешней нагрузки.

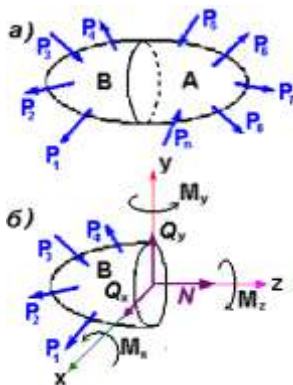


Рисунок 1

На рисунке 1 изображено:

- а) произвольно нагруженное тело,
- б) половина сечения, при помощи которого определяются внутренние силовые факторы.

Алгоритм построения эпюр:

1. Необходимо определить реакции на опорах в конструкции по правилам теоретической механики. Допускается не определять реакции, если возможно определить внутренние усилия с одной стороны.

2. Разбить конструкцию, для которой происходит построение эпюр, на участки. Границей участка считается малейшее изменение в конструкции (приложена какая-либо нагрузка, изменилась геометрическая характеристика конструкции и так далее).

3. Производится построение эпюр внутренних силовых фактора с учетом принятых знаков и проверочных правил (см. пункты 4 и 5).

3 Внутренние силовые факторы и вызываемые ими деформации

В общем случае существует шесть внутренних силовых факторов (см. рисунок 1б).

N – **продольная сила**, в поперечном сечении численно равна сумме проекций на продольную ось Z стержня всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения,

$$N = \sum P_{iz},$$

вызывает деформацию растяжения (сжатия) стержня (в зависимости от того, в каком направлении действует N).

Q_x, Q_y – поперечная (перерезывающая) сила, в поперечном сечении численно равна сумме проекций на ось стержня X или Y всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения,

$$Q_x = \sum P_{ix},$$
$$Q_y = \sum P_{iy},$$

вызывает деформацию- сдвиг.

$M_z = M_{кр}$ –крутящий момент, в поперечном сечении численно равен сумме крутящих моментов относительно продольной оси стержня Z, расположенных по одну сторону от сечения

$$M_z = M_{кр} = \sum M_{iz},$$

вызывает деформацию-кручение.

M_x, M_y –изгибающий момент, в сечении численно равен сумме изгибающих моментов, относительно осей X или Y изгибающих моментов от всех сил и пар сил, расположенных по одну сторону от сечения,

$$M_x = \sum M_{ix},$$
$$M_y = \sum M_{iy},$$

вызывает деформацию-изгиб.

4 Правило знаков для внутренних силовых факторов

Продольная сила N

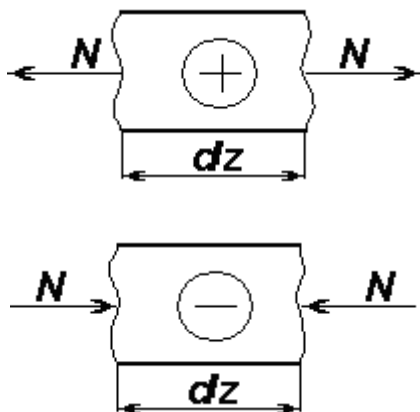
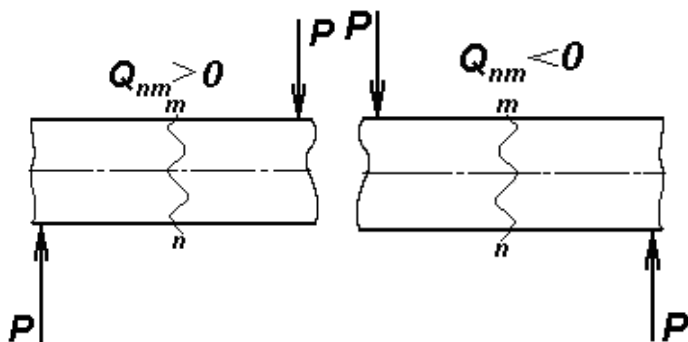


Рисунок 2

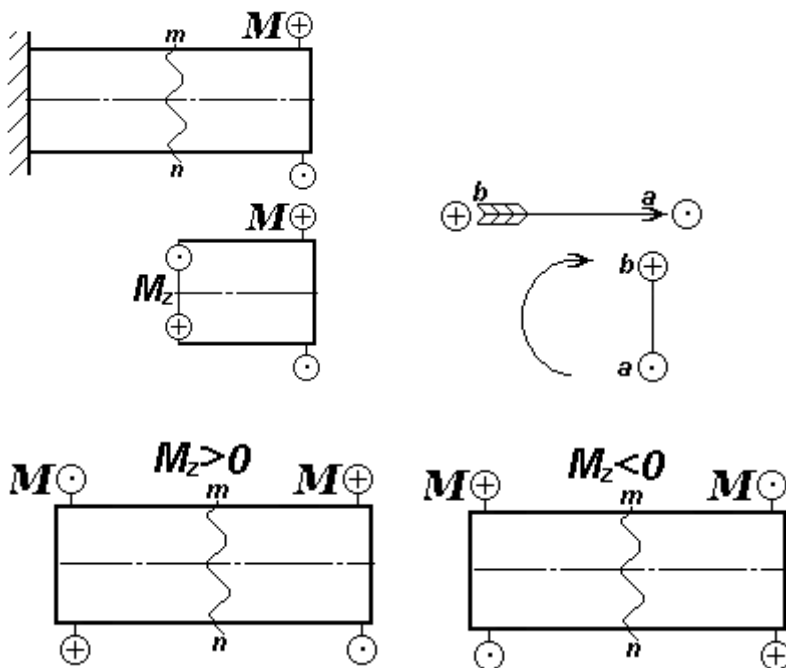
Поперечная (перерезывающая) сила – Q



P - равнодействующая внешних сил

Рисунок 3

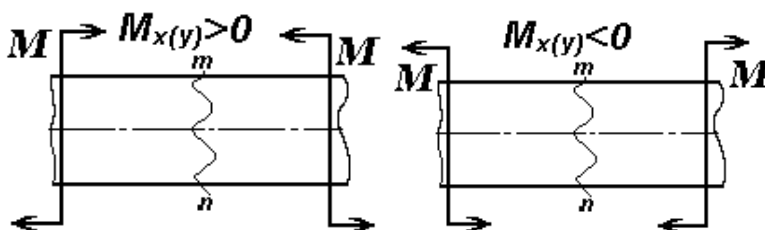
Крутящий момент - $M_z = M_{кр}$



M –уравновешивающий внешний момент

Рисунок 4

Изгибающий момент $M_x(y)$



M –уравновешивающий внешний момент

Рисунок 5

5 Проверочные правила построения эпюр

Первое правило

Эпюра не изменится, если рассматривать правую или левую части конструкции от сечения, то есть можно рассматривать любую часть отсекаемой мысленно конструкции. При этом обычно отбрасывается более нагруженная часть и рассматривается менее нагруженная.

Второе правило

На эпюре продольных сил N (при рассмотрении проекций сил на продольную ось) и поперечных сил - Q_x и Q_y (при рассмотрении проекций сил на поперечные оси) возникает скачок только в том месте, где приложена сосредоточенная сила. Скачок равен величине проекции этой силы на соответствующую ось.

Третье правило

На эпюре изгибающих моментов M_x и M_y и крутящего момента $M_{кр}$ возникает скачок только в том месте, где приложен внешний сосредоточенный момент (пара сил) соответствующего направления. Скачок равен величине этого момента.

Четвертое правило

Существуют дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом

$$Q = dM/dz; \quad q = dQ/dz = d^2M/dz^2.$$

6. Задания расчетно-графической работы

Общий рисунок берется из таблицы 1, а размеры и величины силовых факторов - из таблицы 2.

Таблица 1

№	А	Б
1		
2		
3		

№	В	Г
1		
2		
3		

№	Д	Е
1		
2		
3		

Продолжение таблицы 1

№	А	Б
4		
5		
6		

Продолжение таблицы 1

№	В	Г
4		
5		
6		

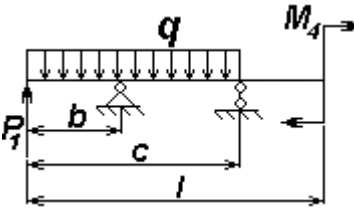
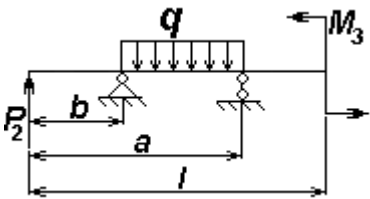
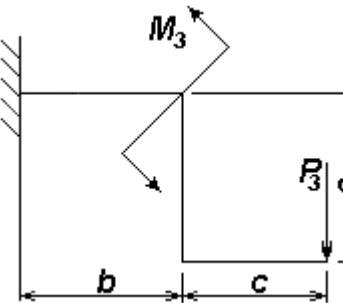
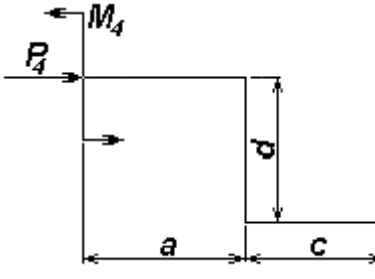
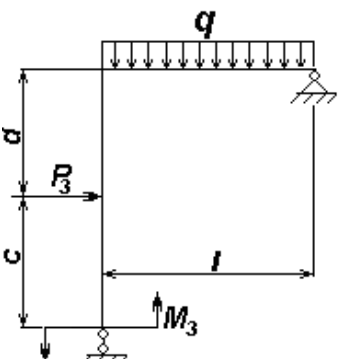
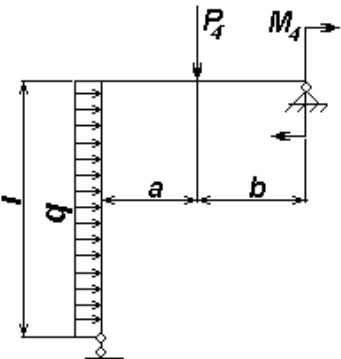
Продолжение таблицы 1

№	Д	Е
4		
5		
6		

Продолжение таблицы 1

№	А	Б
7		
8		
9		

Продолжение таблицы 1

№	В	Г
7		
8		
9		

№	Д	Е
7		
8		
9		

Таблица 2

№	a,м	b,м	c,м	d,м	l,м	P ₁ , кН	P ₂ , кН	P ₃ , кН	P ₄ , кН	M ₁ , кН·м	M ₂ , кН·м	M ₃ , кН·м	M ₄ , кН·м	q кН/м
1	2	3	4	5	7	10	30	20	40	60	20	10	30	10
2	3	1	4	7	10	20	50	10	60	40	80	20	50	8
3	4	2	6	6	8	50	100	40	80	80	30	80	20	7
4	1	3	5	7	9	60	50	40	30	50	120	80	40	10
5	4	2	8	5	10	10	70	40	50	40	90	30	20	5
6	1	6	4	8	10	30	50	10	30	50	100	40	160	5
7	6	2	4	2	8	10	30	20	30	60	60	50	120	6
8	3	2	2	6	9	20	10	20	10	70	20	70	40	9
9	2	3	1	5	7	20	20	10	10	80	30	60	80	10
10	4	2	3	1	6	10	40	10	20	100	90	100	30	7
11	3	4	1	2	6	30	40	10	30	70	70	80	100	6
12	1	3	2	4	6	20	50	10	30	30	100	10	120	10
13	5	6	4	3	9	20	40	20	10	80	80	60	170	6
14	2	3	5	2	7	0	50	15	30	50	60	20	90	10
15	1	4	2	3	6	10	5	20	0	70	50	50	70	7
16	5	1	5	3	9	20	40	10	300	90	100	10	160	5
17	3	4	2	6	8	30	10	20	10	40	70	30	150	10
18	2	2	4	3	7	0	30	15	20	100	110	40	70	10
19	5	2	3	1	6	30	20	20	10	100	80	100	80	9
20	3	4	2	3	6	5	20	15	20	40	60	50	120	7
21	2	2	1	3	7	0	40	20	10	50	90	3	130	10
22	1	4	3	2	6	30	30	10	0	100	70	100	140	5
23	4	3	5	1	9	15	50	15	30	60	120	40	150	6
24	2	7	3	4	10	10	0	10	10	70	110	70	80	9
25	5	2	4	3	7	20	30	20	30	80	50	90	50	5
26	3	4	5	3	9	10	40	15	20	90	40	80	80	10
27	2	3	4	2	7	8	20	10	10	60	30	60	100	6
28	3	4	4	4	9	15	18	8	7	20	10	30	40	5
29	4	5	7	3	7	25	10	20	18	60	50	40	20	8
30	5	6	1	2	8	35	16	28	30	20	40	30	10	10
31	6	5	3	4	10	45	12	17	25	30	40	50	30	8
32	5	4	2	3	9	38	65	45	10	40	40	40	20	9
33	4	3	1	2	8	28	35	45	40	65	55	45	35	4
34	3	2	6	4	8	18	65	30	80	80	70	60	50	15
35	2	4	7	5	9	30	40	50	25	35	45	55	65	12
36	1	3	4	5	8	45	25	14	18	25	25	100	120	11
37	2	5	7	3	7	45	55	65	20	50	40	60	70	14

7 Пример выполнения расчетно-графической работы

Общие рисунки всех девяти задач берем из таблицы 1, а размеры и величины силовых факторов из таблицы 2. Допустим Ваш вариант А-20.

Задача 1

Построить эпюру N

Из таблицы 1в общий рисунок А-1, то есть столбец А, задачи 1, подставляем данные из таблицы 2 (строка-20). Получаем рисунок 6.

Таблица 2¹

№	a,м	b,м	c,м	d,м	l,м	P ₁ ,кН	P ₂ ,кН	P ₃ ,кН	P ₄ ,кН
20	3	4	2	3	6	5	20	15	20

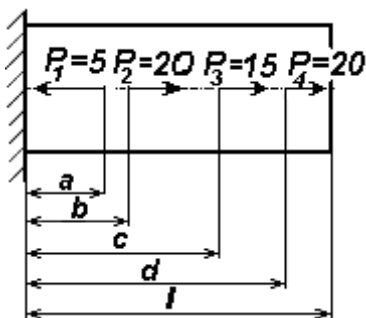


Рисунок 6

Из общего рисунка 6 получаем Ваш вариант (рисунок 7а).

Примечание: если два усилия совпадают в одной точке, то их надо заменить одним, суммарным. Если усилия

действуют в одном направлении то они суммируются, если в противоположные, то вычитаются и суммарное усилие направлено в сторону большего.

В нашем случае совпадают точки приложения сил P_1 и P_4 .
Заменяем их суммарной силой $P_{\Sigma}=P_4-P_1=20-5=15\text{кН}$

Построение эпюры N

Имеем четыре участка. Так как конструкция имеет опору-заделку, реакции можно не определять, но при этом, отсекая, необходимо отбрасывать часть конструкции, где расположена опора.

При этом необходимо всегда ставить переменную координату Z , которая показывает:

- какую часть конструкции мы рассматриваем,
- начало и конец рассматриваемого участка.

Расчет эпюры N

1 участок $N_I = 0$

2 участок $N_{II} = P_2 = 20 \text{ кН}$

3 участок $N_{III} = P_2 + P_{\Sigma} = 20+15=35 \text{ кН}$

4 участок $N_{VI} = P_2 + P_{\Sigma} + P_3 = 20+15+15=50 \text{ кН}$

На рисунке 7 б) по рассчитанным значениям построена эпюра N.

Для построения эпюры, проводится нулевая линия и в масштабе откладываются рассчитанные значения N на каждом участке.

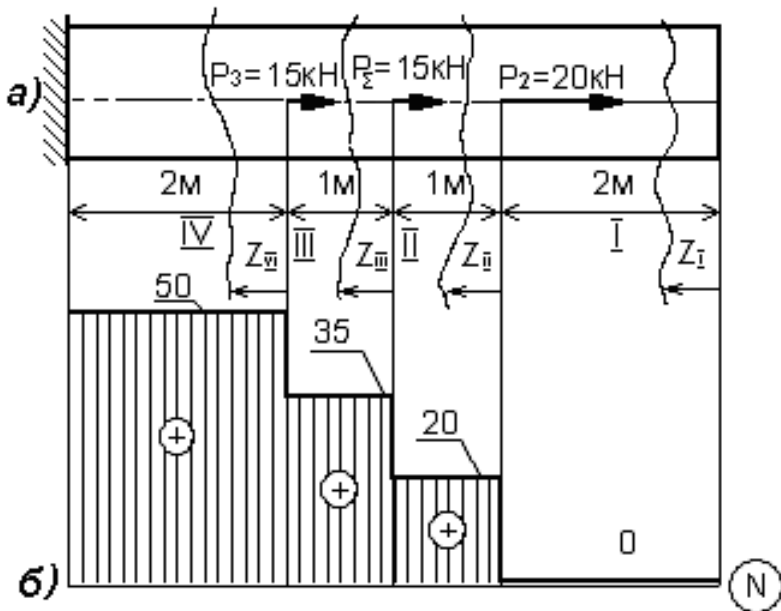


Рисунок 7

Задача 2

Построить эпюру $M_{кр}$

Аналогично первой задаче, из таблицы 1 в общий рисунок А-2, то есть столбец А, задачи 2, подставляем данные из таблицы 2 строка -20.

Таблица 2

№	a, м	b, м	c, м	d, м	l, м	$M_1, \text{кН}$	$M_2, \text{кН}$	$M_3, \text{кН}$	$M_4, \text{кН}$
20	3	4	2	3	6	40	60	50	120

Подставляя исходные данные, получаем из общего рисунка Ваш вариант (рисунок 8а).

В нашем случае совпадают действия моментов M_1 и M_4 . Заменяем их суммарным моментом $M_{\Sigma}=M_1 +M_4=40+120=160$ кН·м

Построение эпюры $M_{кр}$

Имеем четыре участка и так как конструкция имеет опору-заделку, реакции можно не определять, но при этом, рассекая, необходимо рассматривать свободную (консольную) часть.

Расчет эпюры $M_{кр}$

1 участок $M_{кр I} = 0$

2 участок $M_{кр II} = M_{кр 3} = +50$ кН·м

3 участок $M_{кр III} = M_3 - M_{\Sigma} = +50-160=-110$ кН·м

4 участок $M_{кр IV} = M_3 - M_{\Sigma} - M_2 = +50-160 +60=-50$ кН·м

На рисунке 8 б) по рассчитанным значениям построена эпюра $M_{кр}$.

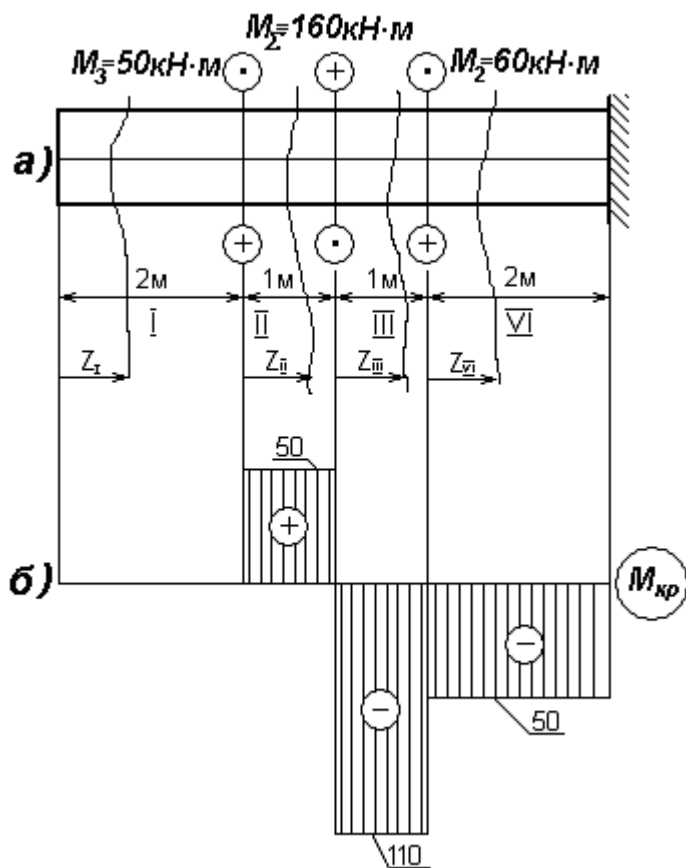


Рисунок 8

Задача 3

Построить эпюры Q и M

Из таблицы 1 в общий рисунок А-3, то есть столбец А, задачи 3, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) - $a=3\text{м}$; $b=4\text{м}$; $l=6\text{м}$; $M_1=40\text{кН}\cdot\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$. Получаем заданный вариант, балку, изображенную на рисунке 9а.

Так как балка имеет опору-заделку, реакции не определяем. Имеем три участка.

Расчет эпюры Q

1 участок. Рассекаем участок. Рассматриваем правую часть $Q_I = 0$

2 участок. Рассматриваем правую часть. Сосредоточенный момент (пара сил) на ось не проецируются $Q_{II} = 0$

3 участок. На третьем участке на поперечную ось проецируется сила $P_1=5\text{кН}$. По правилам знаков для Q (см. раздел 4 и рисунок 3), она будет со знаком +.

$$Q_{III} = P_1 = 5 \text{ кН.}$$

Для построения эпюры, проводится нулевая линия и в масштабе откладываются рассчитанные значения Q на каждом участке (см. рисунок 9б).

Расчет эпюры M

Для эпюры M рассматриваем те же участки, что и для соответствующего участка эпюры Q.

1 участок. $M_I = 0$

2 участок $M_{II} = - M_I = - 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

3 участок $M_{III} = - M_I - P_1 \cdot z_{III} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$0 < z_{III} < 3$; z_{III} в первой степени, то есть эпюра M – прямая наклонная линия. Для построения прямой необходимо и достаточно знать две точки эпюры M . Возьмем - начало и конец участка III.

Первая точка $z_{III}=0$, $M_{III} = - 40 - 5 \cdot 0 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}$

Вторая точка $z_{III} = 3$, $M_{III} = - 40 - 5 \cdot 3 = -40 - 15 = - 55 \text{ кН}\cdot\text{м}$
(см. рисунок 9в).

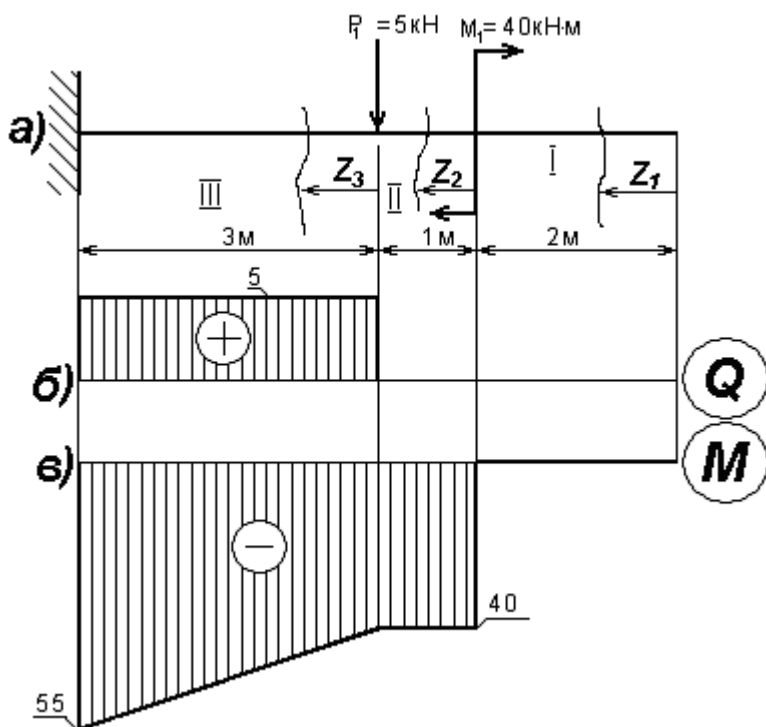


Рисунок 9

Задача 4

Построить эпюры Q и M

Из таблицы 1в общий рисунок А-4, то есть столбец А, задачи 4, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) - $a=3\text{м}$; $b=4\text{м}$; $l=6\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$; $P_4=20\text{кН}$. Получаем заданный вариант балку, изображенную на рисунке 10а.

В задаче 4 необходимо определить реакции на опорах. Опоры определяем по правилам теоретической механики.

$$\underline{\sum F_x=0} \quad H_A=0$$

$$\underline{\sum M_A=0} \quad -P_1 \cdot 3 + R_B \cdot 4 - P_4 \cdot 6=0$$

Откуда

$$R_B = (P_1 \cdot 3 + P_4 \cdot 6)/4 = (5 \cdot 3 + 20 \cdot 6)/4 = 33,75\text{кН}$$

$$\underline{\sum M_B=0} \quad -R_A \cdot 4 + P_1 \cdot 1 - P_4 \cdot 2=0$$

Откуда

$$R_A = (P_1 \cdot 1 - P_4 \cdot 2)/4 = (5 \cdot 1 - 20 \cdot 2)/4 = -8,75\text{кН}$$

Реакция R_A направлена в противоположную сторону, от предполагаемой, то есть вниз. Поэтому меняем знаки в расчете и на чертеже (см. рисунок 10а) $R_A=8,75\text{кН}$

Проверка

$$\underline{\sum F_y=0} \quad -R_A - P_1 + R_B - P_4 = -8,75 - 5 + 33,75 - 20 = 0$$

Расчет эюры Q

Имеем три участка

1 участок. Рассматриваем левую часть, менее нагруженную

$$Q_I = -R_A = -8,75 \text{ кН}$$

2 участок. Рассматриваем левую часть

$$Q_{II} = -R_A - P_1 = -8,75 - 5 = -13,75 \text{ кН}$$

3 участок. Рассматриваем правую часть

$$Q_{III} = P_4 = 20 \text{ кН}$$

Эюра Q построена на рисунке 10б.

Расчет эюры M

1 участок. При построении эюры M рассматриваем те же участки, что и при рассмотрении эюры Q

$$M_I = -R_A \cdot z_1 \quad 0 < z_1 < 3$$

$$z_1=0; \quad M_1=0; \quad z_1=3; \quad M_1=-8,75 \cdot 3 = -26,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{2 участок} \quad M_{II} = -R_A \cdot (3+z_{II}) - P_1 \cdot z_{II} \quad 0 < z_{II} < 1$$

$$z_{II}=0; \quad M_3 = -26,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2=1; \quad M_3 = -8,75 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $M_{III} = -P_4 \cdot z_{III}$ $0 < z_{III} < 2$

$z_{III} = 0; \quad M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$z_{III} = 2; \quad M_3 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Эпюра M построена на рисунке 10в

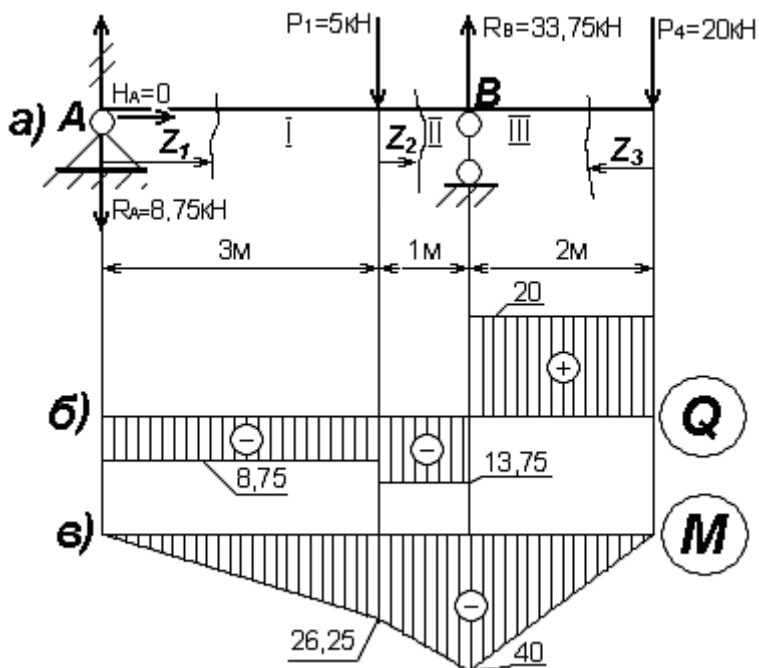


Рисунок 10

Задача 5

Построить эпюры Q и M

Из таблицы 1в общий рисунок А-5, то есть столбец А, задачи 5, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) - $b=4\text{м}$; $d=3\text{м}$; $l=6\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$; $q=7\text{кН/м}$. Получаем балку, изображенную на рисунке 11а.

В задаче 5 необходимо определить реакции на опорах.

Заменим распределенную нагрузку q сосредоточенной - Q

$$Q = q \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кН}$$

$$\underline{\sum F_x = 0} \quad \text{Откуда} \quad H_B = 0$$

$$\underline{\sum M_A = 0} \quad -Q \cdot 3/2 - P_1 \cdot 4 + R_B \cdot 6 = 0$$

Откуда

$$R_B = (Q \cdot 3/2 + P_1 \cdot 4) / 6 = (21 \cdot 1,5 + 5 \cdot 4) / 6 = 8,58 \text{ кН}$$

$$\underline{\sum M_B = 0} \quad -R_A \cdot 6 + Q \cdot 4,5 + P_1 \cdot 2 = 0$$

Откуда

$$R_A = (Q \cdot 4,5 + P_1 \cdot 2) / 6 = (21 \cdot 4,5 + 5 \cdot 2) / 6 = 17,42 \text{ кН}$$

Проверка

$$\underline{\sum F_y = 0}$$

$$R_A - Q - P_1 + R_B = 17,42 - 21 - 5 + 8,58 = 0$$

Расчет эюры Q

Имеем три участка

1 участок. Рассматриваем левую часть

$$Q_I = R_A - q \cdot Z_I;$$

Z_I в первой степени, то есть эюра Q – прямая наклонная линия. Возьмем две точки - начало и конец участка I.

$$0 < Z_I < 3; \quad Z_I=0; \quad Q_I = R_A=17,42\text{кН} \quad z_I=3;$$

$$Q_I=17,42-7 \cdot 3=-3,58\text{кН}$$

2 участок. Рассматриваем правую часть

$$Q_{II} = -R_B = 8,6\text{кН}$$

3 участок. Рассматриваем левую часть

$$Q_{III} = -R_B + P_1 = -8,58 + 5 = -3,58\text{кН}$$

Эюра Q построена на рисунке 11б.

Расчет эюры M

1 участок. В эюре M рассматриваем те же участки, что и в эюре Q

$$M_I = R_A \cdot Z_I - q \cdot Z_I^2 / 2 \quad 0 < Z_I < 3;$$

Так как Z_I во второй степени, то эюра M – парабола. В нашем случае эюра Q пересекает ось, то есть в том месте, где на эюре Q=0, на эюре M будет экстремум.

Строим эпюру М по трем точкам, две точки – это начало и конец участка, третья точка - экстремум.

$$Z_I=0; M_I=0$$

$$Z_I=3; M_I=17,42 \cdot 3 - 7 \cdot 3^2/2 = 20,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Найдем точку экстремума. Для этого на данном участке приравняем эпюру $Q_I=0$, и решим уравнение относительно Z_I

$$Q_I = R_A - q \cdot Z_I = 0 \quad \text{откуда} \quad Z_I = R_A / q = 17,42/7 = 2,49 \text{ м}$$

$$Z_I = 2,49 \text{ м} \quad M_I = 17,42 \cdot 2,49 - 7 \cdot 2,49^2/2 = 21,67 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\underline{2 \text{ участок}} \quad M_{II} = +R_B \cdot Z_{II} \quad 0 < Z_{II} < 2$$

$$Z_{II} = 0; \quad M_{II} = 0$$

$$Z_{II} = 2; \quad M_{II} = 8,58 \cdot 2 = 17,16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\underline{3 \text{ участок}} \quad M_{III} = +R_B \cdot (2 + Z_{III}) - P_1 \cdot Z_{III} \quad 0 < Z_{III} < 1$$

$$Z_{III} = 0; \quad M_{III} = 6,58 \cdot 2 = 13,16 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Z_{III} = 1; \quad M_{III} = +8,58 \cdot (2 + 1) - 5 \cdot 1 = 20,74 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюра М построена на рисунке 11в.

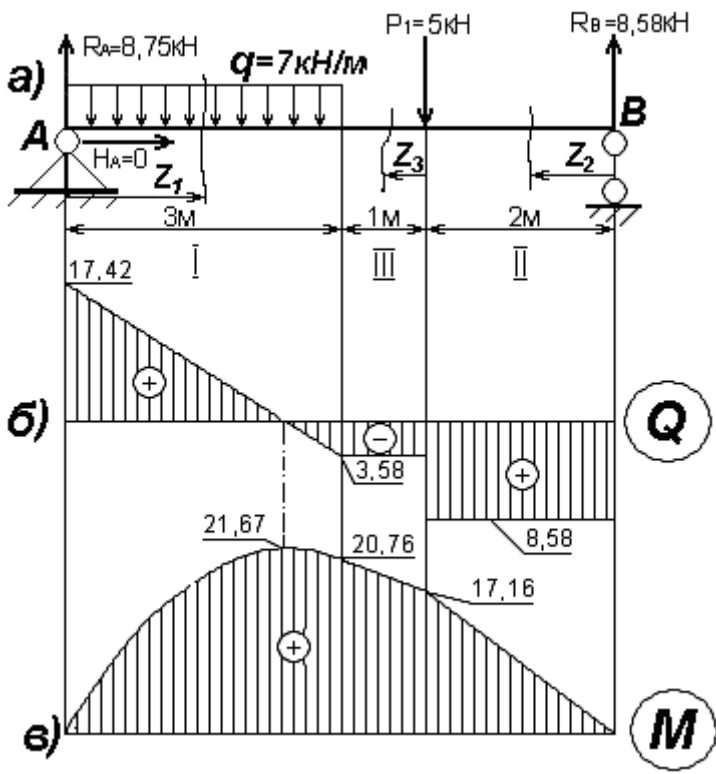


Рисунок 11

Задача 6

Построить эпюры Q и M

В задаче 6 - балка с шарниром. Из таблицы 1в общий рисунок А-6, то есть столбец А, задачи 6, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) - $b=4\text{м}$; $c=2\text{м}$; $d=3\text{м}$; $l=6\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$; $M_3=50\text{кНм}$. Получаем заданную балку, изображенную на рисунке 12а.

Для ее решения необходимо определить реакцию на шарнирно подвижной опоре. Берем сумму моментов правой части балки относительно шарнира

$$\sum M_o^{\text{пр}}=0; \quad R_A \cdot 4 - M_3 - P_2 \cdot 1=0$$

$$\text{Откуда} \quad R_A=(M_3 + P_2 \cdot 1)/4=(50 + 20 \cdot 1)/4=17,5\text{кН}$$

Далее построение эпюр производится, как для балки с заделкой. Реакции не определяем. Имеем четыре участка. Рассматриваем левую часть.

Расчет эпюры Q

$$\underline{1 \text{ участок}} \quad Q_I = - R_A = - 17,5 \text{ кН}$$

$$\underline{2 \text{ участок}} \quad Q_{II} = Q_I = - 17,5 \text{ кН}$$

$$\underline{3 \text{ участок}} \quad Q_{III} = - R_A + P_2 = - 17,5 + 20 = 2,5 \text{ кН}$$

$$\underline{4 \text{ участок}} \quad Q_{IV} = Q_{III} = 2,5 \text{ кН}$$

Эпюра Q построена на рисунке 12 б.

Расчет эпюры M

$$\underline{1 \text{ участок}} \quad M_I = R_A \cdot Z_I; \quad 0 < Z_I < 2;$$

$$Z_I=0; \quad M_I=0, \quad Z_I=2; \quad M_I= R_A \cdot 2=17,5 \cdot 2=35\text{кН}\cdot\text{м}$$

$$\underline{2 \text{ участок}} \quad M_{II}=R_A \cdot (2+Z_{II}) - M_3; \quad 0 < Z_{II} < 1;$$

$$Z_{II}=0; \quad M_{II}=R_A \cdot 2 - M=35 - 50= - 15\text{кН}\cdot\text{м}$$

$$Z_{II}=1; \quad M_{II}=R_A \cdot (2+1) - M= 17,5 \cdot (2+1) - 50 =2,5\text{кН}\cdot\text{м}$$

3 участок $M_{III} = R_A \cdot (3 + Z_{III}) - M - P_2 \cdot Z_{III}; 0 < Z_{III} < 1;$

$Z_{III} = 0; M_{III} = R_A \cdot 3 - M = 17,5 \cdot 3 - 50 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$Z_{III} = 1; M_{III} = R_A \cdot (3 + 1) - M - P_2 \cdot 1 = 17,5 \cdot 4 - 50 - 20 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$

4 участок $M_{IV} = R_A \cdot (4 + Z_{IV}) - M - P_2 \cdot (1 + Z_{IV}); 0 < Z_{IV} < 2;$

$Z_{IV} = 0; M_{IV} = 0$

$Z_{IV} = 2; M_{IV} = 17,5 \cdot (4 + 2) - 50 - 20 \cdot (1 + 2) = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Эпюра M построена на рисунке 12 в.

Дополнительная проверка: на эпюре моментов в том месте, где находится шарнир, должен быть ноль.

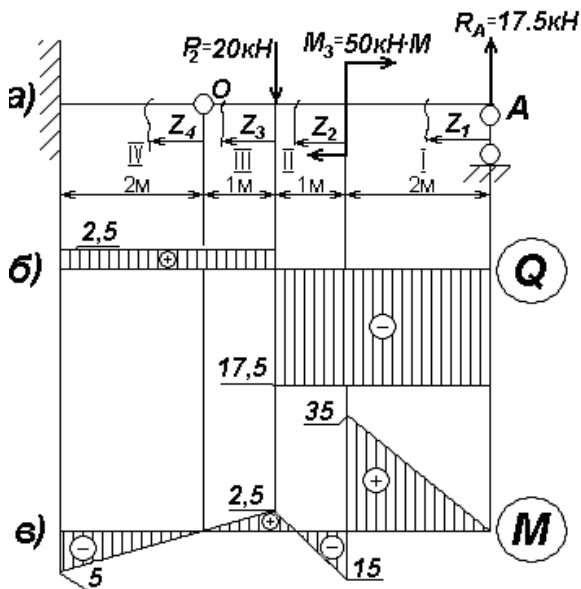


Рисунок 12

Задача 7

Построить эпюры Q и M

Из таблицы 1в общий рисунок, рисунок А-7, то есть столбец А, задачи 7, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) - $b=4\text{м}$; $d=3\text{м}$; $l=6\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$; $q=7\text{кН/м}$; $M_1=40\text{кН}\cdot\text{м}$. Получаем балку, изображенную на рисунке 13а.

В задаче 5 необходимо определить реакции на опорах. Заменяем распределенную нагрузку q сосредоточенной Q $Q = q \cdot l = 7 \cdot 1 = 7 \text{ кН}$

$$\underline{\sum F_x = 0} \quad \text{Откуда} \quad H_B = 0$$

$$\underline{\sum M_A = 0} \quad P_1 \cdot 3 - Q \cdot 0,5 - M_1 + R_B \cdot 1 - P_1 \cdot 3 = 0$$

Откуда

$$R_B = (Q \cdot 0,5 + M_1) / 1 = (7 \cdot 0,5 + 40) / 1 = 43,5 \text{ кН}$$

$$\underline{\sum M_B = 0} \quad P_1 \cdot 4 + Q \cdot 0,5 - M_1 - R_A \cdot 1 - P_1 \cdot 2 = 0$$

Откуда

$$R_A = (P_1 \cdot 4 + Q \cdot 0,5 - P_1 \cdot 2 + M_1) / 1 = (5 \cdot 2 + 7 \cdot 0,5 - 40) / 1 = -26,5 \text{ кН}$$

Реакция R_A направлена в противоположную сторону, от предполагаемой, то есть вниз. Поэтому меняем знаки в расчете и на чертеже (см. рисунок 13а).

$$\text{Проверка} \quad \underline{\sum F_y = 0}$$

$$-P_1 - R_A - Q + R_B - P_1 = -5 - 26,5 - 7 + 43,5 - 5 = 0$$

Расчет эпюры Q

Имеем три участка

1 участок Рассматриваем левую часть

$$Q_I = -P_1 = -5\text{H};$$

2 участок Рассматриваем левую часть

$$Q_{II} = -P_1 - R_A - q \cdot Z_{II};$$

$$0 < Z_{II} < 1; \quad Z_I = 0; \quad Q_I = -P_1 - R_A = -5 - 26,5 = -31,5\text{кН}$$

$$z_I = 1; \quad Q_I = -P_1 - R_A - q \cdot Z_{II} = -5 - 26,5 - 7 \cdot 1 = -38,5\text{кН}$$

3 участок Рассматриваем правую часть

$$Q_{III} = -P_1 = -5\text{кН}$$

Эпюра Q построена на рисунке 13б.

Расчет эпюры M

1 участок $M_I = -P_1 \cdot Z_I; \quad 0 < Z_I < 3;$

$$Z_I = 0; \quad M_I = 0; \quad Z_I = 3; \quad M_I = -5 \cdot 3 = -15\text{кН}\cdot\text{м}$$

2 участок. Так как z_{II} во второй степени, то эпюра M – парабола. Имеем частный случай, параболу строим по двум точкам, так как эпюра Q не пересекается с осью.

$$M_{II} = -P_1 \cdot (3 + Z_{II}) - R_A \cdot Z_{II} - q \cdot Z_{II}^2 / 2; \quad 0 < Z_{II} < 1;$$

$$Z_{II}=0; M_{II}=-5 \cdot 3=-15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Z_{II}=1; M_{II}=-5 \cdot (3+1) - 26,5 \cdot 1 - 7 \cdot 1^2/2 = -50 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

3 участок $M_{III}=-P_1 \cdot Z; \quad 0 < Z_{III} < 2;$

$$Z_{III}=0; M_{III}=0; \quad Z_1=2; M_{III}=-P_1 \cdot 2=5 \cdot 2=-10 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Эпюра M построена на рисунке 13в.

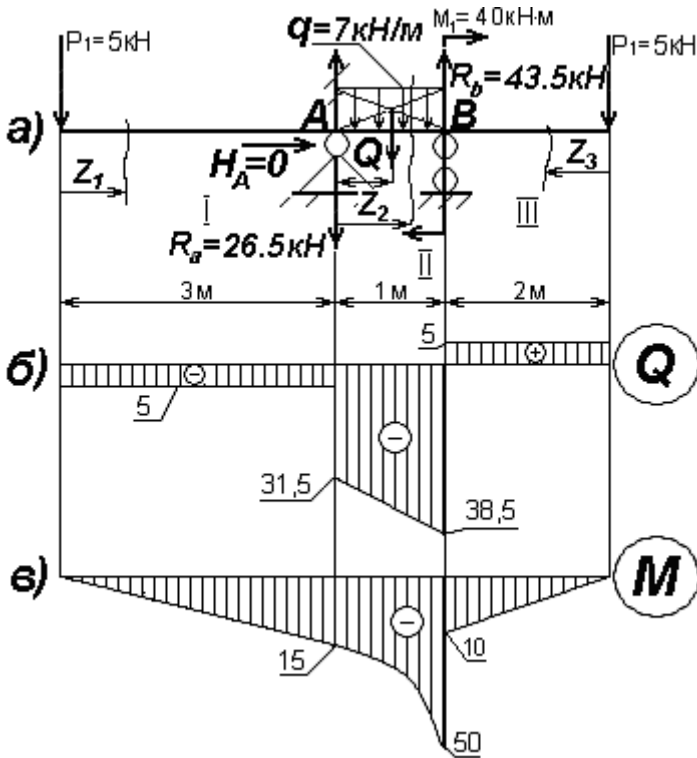


Рисунок 13

Задача 8

Построить эпюры N, Q и M

В задаче 8 необходимо построить эпюры в раме.

Рама - система, составленная из нескольких брусьев (стержней), жестко соединенных между собой в узлах.

В плоскости внутренними силовыми факторами в рамах являются N, Q и M.

Из таблицы 1 в общий рисунок А-8, то есть столбец А, задачи 8, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) – $a=3\text{м}; b=4\text{м}; c=2\text{м}; P_1=5\text{кН}; M_1=40\text{кН}\cdot\text{м}$. Получаем раму, изображенную на рисунке 14а.

Так как рама имеет опору-заделку, реакции не определяем. Имеем три участка.

Расчет эпюры N

1 участок. Рассматриваем сумму проекций сил на продольную ось, расположенных справа от сечения $N_I=0$;

2 участок. Аналогично на втором участке $N_{II}=P_1=5\text{кН}$;

3 участок. Аналогично на третьем участке $N_{III}=0$

Эпюра N показана на рисунке 14 б.

Расчет эпюры Q

1 участок. Рассматриваем сумму проекций сил на поперечную ось, расположенных справа от сечения $Q_I=P_1=5\text{кН}$.

2 участок. Аналогично на втором участке $Q_{II}=0$.

3 участок. Аналогично на третьем участке $Q_{III}=P_1=5\text{кН}$.

Эпюра Q показана на рисунке 14 в.

Расчет эпюры M

1 участок. $M_I=-P_1 \cdot Z_I$; $0 < Z_I < 3$;

$$Z_I=0; M_I=0; \quad Z_I=3; M_I=-5 \cdot 3 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

2 участок. $M_{II} = -P_1 \cdot 3 + M_I = -5 \cdot 3 + 40 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$

3 участок. $M_{III} = -P_1 \cdot (3 + Z_{III}) + M_I; \quad 0 < Z_{III} < 2;$

$$Z_{III}=0; M_{III} = -5 \cdot (3+0) + 40 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Z_{III}=2; M_{III} = -5 \cdot (3+2) + 40 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра M показана на рисунке 14 г.

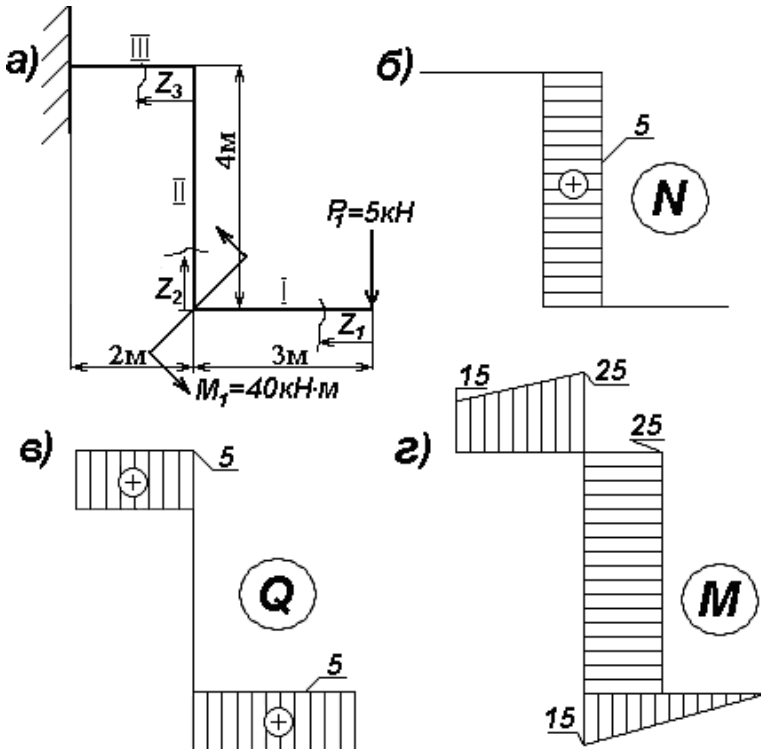


Рисунок 14

Задача 9

Из таблицы 1 в общий рисунок А-9, то есть столбец А, задачи 9, подставляем данные из таблицы 2 (строка -20) – $a=3\text{м}$; $b=4\text{м}$; $l=6\text{м}$; $P_1=5\text{кН}$; $M_1=40\text{кН}\cdot\text{м}$; $q=7\text{кН/м}$. Получаем раму, изображенную на рисунке 15а.

В задаче 9 необходимо определить реакции на опорах. Заменяем распределенную нагрузку q сосредоточенной Q $Q = q \cdot b = 7 \cdot 6 = 42 \text{ кН}$

$$\underline{\Sigma F_x = 0} \quad H_A - P_1 = 0; \quad \text{Откуда} \quad H_A = P_1 = 5 \text{ кН.}$$

$$\underline{\Sigma M_A = 0} \quad M_1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 6 + P_1 \cdot 7 = 0$$

Откуда

$$R_B = (Q \cdot 3 - M_1 - P_1 \cdot 7) / 6 = (42 \cdot 3 - 40 - 5 \cdot 7) / 6 = 8,5 \text{ кН}$$

$$\underline{\Sigma M_B = 0} \quad -R_A \cdot 6 + H_A \cdot 7 + M_1 + Q \cdot 3 = 0$$

Откуда

$$R_A = (H_A \cdot 7 + M_1 + Q \cdot 3) / 6 = (5 \cdot 7 + 40 + 42 \cdot 3) / 6 = 33,5 \text{ кН}$$

Расчет эпюры N

1 участок. $N_I = -R_A = -33,5 \text{ кН}$;

2 участок. $N_{II} = -33,5 \text{ кН}$;

3 участок $N_{III} = -P_1 = -5 \text{ кН}$

Эпюра N показана на рисунке 15 б.

Расчет эпюры Q

1 участок. $Q_I = -H_A = -5 \text{ кН};$

2 участок. $Q_{II} = -H_A = -5 \text{ кН};$

3 участок. $Q_{III} = -R_B + q \cdot Z_{III} = 5 \text{ кН}; 0 < Z_{III} < 6;$

$$Z_{III} = 0; \quad Q_{III} = -R_B = -8,5 \text{ кН}$$

$$Z_{III} = 6; \quad Q_{III} = -R_B + q \cdot 6 = -8,5 + 7 \cdot 6 = 33,5 \text{ кН}$$

Эпюра Q показана на рисунке 15 в.

Расчет эпюры M

1 участок. $M_I = -H_A \cdot Z_I; \quad 0 < Z_I < 3;$

$$Z_I = 0; \quad M_I = 0; \quad Z_I = 3; \quad M_I = -H_A \cdot 3 = -5 \cdot 3 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2 участок. $M_I = -H_A \cdot (3 + Z_{II}) - M_1; \quad 0 < Z_{II} < 4;$

$$Z_{II} = 0; \quad M_I = -5 \cdot (3 + 0) - 40 = -55 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Z_{II} = 4; \quad M_I = -5 \cdot (3 + 4) - 40 = -55 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $M_{III} = R_B \cdot Z_{III} - q \cdot Z_{III}^2 / 2; \quad 0 < Z_{III} < 6;$

$$Z_{III} = 0; \quad M_{III} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Z_{III} = 6; \quad M_{III} = 8,5 \cdot 6 - 7 \cdot 6^2 / 2 = -75 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Найдем третью точку, точку экстремума. Для этого на данном участке приравняем эюру $Q_I=0$, и решим уравнение относительно Z_I

$$Q_{III} = -R_B + q \cdot Z_{III} = 0 \quad \text{откуда} \quad Z_{III} = R_B / q = 8,5 / 7 = 1,2 \text{ м}$$

$$Z_{III} = 1,2 \quad M_{III} = 8,5 \cdot 1,2 - 7 \cdot 1,2^2 / 2 = 5,16 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Эюры M построена на рисунке 15 г.

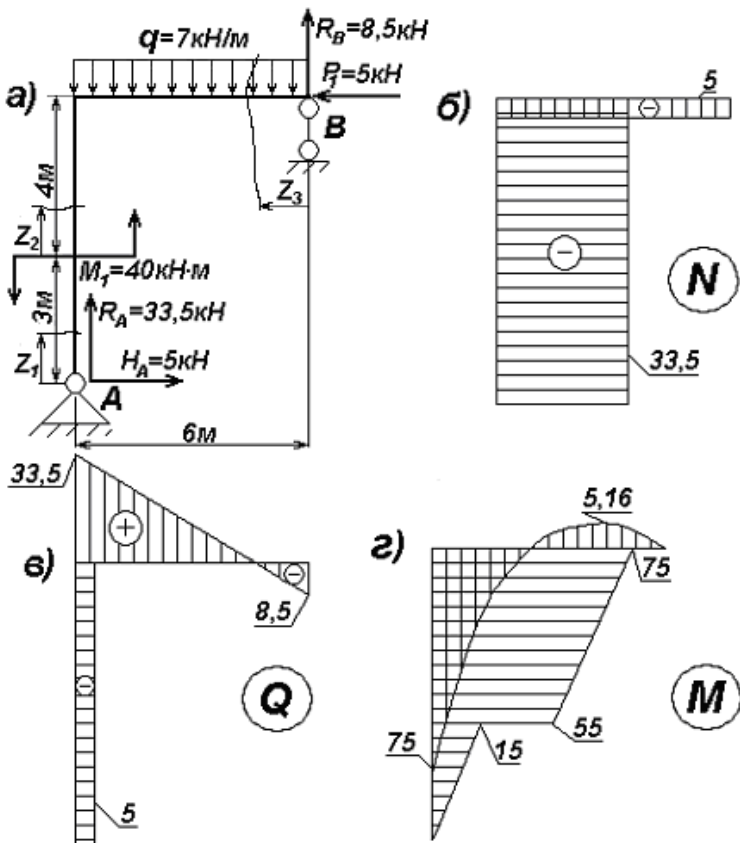


Рисунок 15

Учебное издание

Карпович Анатолий Петрович

Старовойтов Сергей Иванович

Сопротивление материалов

**Тема « Построение эпюр внутренних
силовых факторов»**

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 15.02.2012 г. Формат 60x84 1/24 Бумага печатная.

Усл. п.л. 2,67. Тираж 100. Издат. № 2130.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская обл., Выгоничский р-он, с. Кокино, Брянская ГСХА